

L'équation de Fermat d'exposant -1

Denis SIMON (denis.simon@unicaen.fr)

29 mars 2016

Le fameux Théorème de Fermat concerne l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

où n est un entier fixé, et où l'on cherche des solutions x , y et z entières. Comme cette équation est homogène, si (x, y, z) forme une solution, alors pour tout entier g , (gx, gy, gz) est encore une solution. On peut donc se contenter d'étudier les solutions telles que x , y et z n'ont pas de diviseur commun (dans leur ensemble). À la suite de nombreux autres mathématiciens, Wiles a montré en 1994 que l'équation de Fermat n'avait pas d'autre solution que $(0, 0, 0)$ dès que $n \geq 3$.

Nous nous intéressons ici à l'équation de Fermat d'exposant -1 , c'est-à-dire

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Nous considérons d'abord le cas des solutions en entiers relatifs, puis le cas des solutions en entiers naturels. Nous allons voir que tout triplet (x, y, z) peut être obtenu à partir d'une relation $u + v = w$ en divisant chaque nombre par uvw .

Théorème 1 *Soit $z > 1$ un entier. Les solutions en entiers relatifs de*

$$\left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{z} \tag{1}$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, sont données par

$$x = |u + v|u \quad y = |u + v|v$$

où $uv = \pm z$ est une factorisation de z telle que u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Preuve : Il n'est pas difficile de voir que ces formules donnent des solutions de (1) et que les entiers x , y , z sont premiers entre eux. Dans cette solution, les entiers x et y sont non nuls car la coprimauté de u et v , ainsi que la condition $z > 1$, impliquent $u + v \neq 0$.

Soit (x, y, z) une solution de (1) telle que les trois entiers sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit $t > 0$ le *pgcd* de x et y . On note $x = tu$ et $y = tv$, avec u et v premiers entre eux. L'équation (1) devient donc

$$|z(u + v)| = |tw|. \tag{2}$$

On a $1 = \text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(u, u + v) = \text{pgcd}(u + v, v)$. Ainsi, $u + v$ est premier avec u et v , donc avec uv . L'équation (2) implique alors que $u + v$ divise t . On sait aussi que t divise x et y , donc t

est premier avec z , et l'équation (2) implique que t divise $u + v$. Ceci prouve que $t = |u + v|$, d'où la conclusion. ■

Remarque : Pour $z = 1$, toutes les solutions sont bien de la forme annoncée par le Théorème 1 mais il ne faut pas considérer les cas $(u, v) = \pm(1, -1)$ pour lesquels $u + v = 0$. Ainsi, les solutions sont données uniquement par $(u, v) = \pm(1, 1)$, c'est-à-dire $(x, y) = \pm(2, 2)$.

Corollaire 1 Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers relatifs de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (3)$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = 2^w$$

où w est le nombre de facteurs premiers distincts de z .

Remarque : Attention, ce comptage identifie les solutions (x, y) et (y, x) . Par exemple, l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ a les quatre couples solutions $(x, y) \in \{(1, -2), (-2, 1), (3, 6), (6, 3)\}$, donc seulement deux paires de solutions.

Preuve : Pour $z = 1$, il n'y a que la solution $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Pour $z > 1$, il suffit de compter les couples de solutions de l'équation (3) et de diviser par 2 pour compter les paires. Pour compter les couples de solutions de l'équation (3), on compte les couples de solutions de (1) et on divise par 2, car il y a exactement autant de solutions telles que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ que de solutions telles que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$ (on passe de l'une à l'autre en changeant (x, y) en $(-x, -y)$).

Comme deux solutions données par le Théorème 1 sont différentes si et seulement si $|u| \neq |v|$, il suffit de compter les couples (u, v) . c'est-à-dire le nombre de décompositions de z en produit de deux nombres premiers entre eux, puis de multiplier par 4 pour tenir compte des signes quelconques de u et v . Si z a exactement w facteurs premiers distincts, alors ce nombre est exactement 4×2^w . ■

Corollaire 2 Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers relatifs de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (4)$$

telles que (x, y, z) ne sont pas nécessairement premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = \prod_{i=1}^w (2e_i + 1)$$

où la décomposition de z en facteurs premiers est $z = \prod_{i=1}^w p_i^{e_i}$

Preuve : Pour chaque solution de (4), on note $g > 0$ le pgcd de (x, y, z) . C'est un diviseur de z . En divisant chaque entier par g , on est ramené à une solution de (3) où l'on a remplacé z par z/g ,

dont le nombre de paires de solutions est $2^{w(z/g)}$ d'après le corollaire 1. On a donc

$$\begin{aligned} N &= \sum_{g|z} 2^{w(z/g)} \\ &= \sum_{g|z} 2^{w(g)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \alpha_1 \leq e_1 \\ \dots \\ 0 \leq \alpha_w \leq e_w}} 2^{\sum \delta(\alpha_i)} \end{aligned}$$

où $\delta(x) = 1$ si $x > 0$ et $\delta(x) = 0$ sinon. Donc

$$\begin{aligned} N &= \prod_{i=1}^w \left(\sum_{0 \leq \alpha_i \leq e_i} 2^{\delta(\alpha_i)} \right) \\ &= \prod_{i=1}^w (2e_i + 1) \end{aligned}$$

■

Théorème 2 Soit $z > 0$ un entier naturel. Les solutions en entiers naturels de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (5)$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, sont données par

$$x = (u + v)u \quad y = (u + v)v$$

où $uv = z$ est une factorisation de z telle que u et v sont des entiers naturels premiers entre eux.

Preuve : Pour $z > 1$, il suffit d'appliquer le Théorème 1 et de ne considérer que les solutions > 0 , c'est-à-dire les solutions avec $u > 0$ et $v > 0$. Les formules conviennent aussi pour le cas $z = 1$. ■

Corollaire 3 Soit $z > 1$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers naturels de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (6)$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = 2^{w-1}$$

où w est le nombre de facteurs premiers distincts de z .

Si $z = 1$, il n'y a qu'une seule solution : $(x, y) = (2, 2)$.

Preuve : identique à celle du Corollaire 1. ■

Corollaire 4 Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers naturels de l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (7)$$

telles que (x, y, z) ne sont pas nécessairement premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = \frac{1}{2} \left(1 + \prod_{i=1}^w (2e_i + 1) \right)$$

où la décomposition de z en facteurs premiers est $z = \prod_{i=1}^w p_i^{e_i}$.

Preuve : semblable à celle du Corollaire 2. Il faut toutefois tenir compte du cas particulier $g = z$, qui dans le Corollaire 3 donne un compte légèrement différent, d'où le +1 correctif dans la formule finale. ■

Corollaire 5 Toute solution de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

avec x, y, z premiers entre eux (resp. non nécessairement premiers entre eux) est obtenue à partir d'une relation $u + v = w$ où u, v, w sont des entiers premiers entre eux deux à deux (resp. des entiers quelconques) en divisant chaque terme par uvw .

Preuve : Il suffit d'appliquer les formules montrées précédemment. ■

Exemple : En appliquant ce corollaire, on peut passer simplement d'un triplet pythagoricien classique, solution de $x^2 + y^2 = z^2$ à une solution de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$. Par exemple, à partir de la relation $3^2 + 4^2 = 5^2$, on obtient :

$$\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}.$$

Ainsi, l'équation de Fermat a une infinité de solution pour l'exposant -2 . On voit aussi que l'équation de Fermat d'exposant ≤ -3 n'a pas de solution.