L'équation de Fermat d'exposant -1

Denis SIMON (denis.simon@unicaen.fr)

29 mars 2016

Le fameux Théorème de Fermat concerne l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

où n est un entier fixé, et où l'on cherche des solutions x, y et z entières. Comme cette équation est homogène, si (x, y, z) forme une solution, alors pour tout entier g, (gx, gy, gz) est encore une solution. On peut donc se contenter d'étudier les solutions telles que x, y et z n'ont pas de diviseur commun (dans leur ensemble). À la suite de nombreux autres mathématiciens, Wiles a montré en 1994 que l'équation de Fermat n'avait pas d'autre solution que $(0, 0, 0)$ dès que $n \geqslant 3$.

Nous nous intéressons ici à l'équation de Fermat d'exposant -1, c'est–à–dire

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \, .$$

Nous considérons d'abord le cas des solutions en entiers relatifs, puis le cas des solutions en entiers naturels. Nous allons voir que tout triplet (x, y, z) peut être obtenu à partir d'une relation $u+v = w$ en divisant chaque nombre par uvw.

Théorème 1 *Soit $z > 1$ un entier. Les solutions en entiers relatifs de*

$$\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{z} \tag{1}$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, sont données par

$$x = |u + v|u \qquad y = |u + v|v$$

où $uv = \pm z$ est une factorisation de z telle que u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Preuve : Il n'est pas difficile de voir que ces formules donnent des solutions de (1) et que les entiers x, y, z sont premiers entre eux. Dans cette solution, les entiers x et y sont non nuls car la coprimalité de u et v, ainsi que la condition $z > 1$, impliquent $u + v \neq 0$.

Soit (x, y, z) une solution de (1) telle que les trois entiers sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit $t > 0$ le *pgcd* de x et y. On note $x = tu$ et $y = tv$, avec u et v premiers entre eux. L'équation (1) devient donc

$$|z(u + v)| = |tuv| \, . \tag{2}$$

On a $1 = pgcd(u, v) = pgcd(u, u + v) = pgcd(u + v, v)$. Ainsi, $u + v$ est premier avec u et v, donc avec uv. L'équation (2) implique alors que $u + v$ divise t. On sait aussi que t divise x et y, donc t

est premier avec z, et l'équation (2) implique que t divise $u+v$. Ceci prouve que $t = |u+v|$, d'où la conclusion. ■

Remarque : Pour $z = 1$, toutes les solutions sont bien de la forme annoncée par le Théorème 1 mais il ne faut pas considérer les cas $(u, v) = \pm(1, -1)$ pour lesquels $u + v = 0$. Ainsi, les solutions sont donnes uniquement par $(u, v) = \pm(1, 1)$, c'est–à–dire $(x, y) = \pm(2, 2)$.

Corollaire 1 *Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers relatifs de l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{3}$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = 2^w$$

où w est le nombre de facteurs premiers distincts de z.

Remarque : Attention, ce comptage identifie les solutions (x, y) et (y, x). Par exemple, l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ a les quatre couples solutions $(x, y) \in \{(1, -2), (-2, 1), (3, 6), (6, 3)\}$, donc seulement deux paires de solutions.

Preuve : Pour $z = 1$, il n'y a que la solution $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Pour $z > 1$, il suffit de compter les couples de solutions de l'équation (3) et de diviser par 2 pour compter les paires. Pour compter les couples de solutions de l'équation (3), on compte les couples de solutions de (1) et on divise par 2, car il y a exactement autant de solutions telles que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ que de solutions telles $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$ (on passe de l'une à l'autre en changeant (x, y) en $(-x, -y)$).

Comme deux solutions données par le Théorème 1 sont différentes si et seulement si $|u| \neq |v|$, il suffit de compter les couples (u, v). c'est–à–dire le nombre de décompositions de z en produit de deux nombres premiers entre eux, puis de multiplier par 4 pour tenir compte des signes quelconques de u et v. Si z a exactement w facteurs premiers distincts, alors ce nombre est exactement 4×2^w. ■

Corollaire 2 *Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers relatifs de l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{4}$$

telles que (x, y, z) ne sont pas nécessairement premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = \prod_{i=1}^{w} (2e_i + 1)$$

où la décomposition de z en facteurs premiers est $z = \prod_{i=1}^{w} p_i^{e_i}$

Preuve : Pour chaque solution de (4), on note $g > 0$ le *pgcd* de (x, y, z). C'est un diviseur de z. En divisant chaque entier par g, on est ramené à une solution de (3) où l'on a remplacé z par z/g, dont le nombre de paires de solutions est $2^{w(z/g)}$ d'après le corollaire 1. On a donc

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{g|z} 2^{w(z/g)} \\
&= \sum_{g|z} 2^{w(g)} \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant\alpha_1\leqslant e_1 \\ \cdots \\ 0\leqslant\alpha_w\leqslant e_w}} 2^{\sum \delta(\alpha_i)}
\end{aligned}$$

où $\delta(x) = 1$ si $x > 0$ et $\delta(x) = 0$ sinon. Donc

$$\begin{aligned}
N &= \prod_{i=1}^{w} \left(\sum_{0\leqslant\alpha_i\leqslant e_i} 2^{\delta(\alpha_i)} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{w} (2e_i + 1)
\end{aligned}$$

■

Théorème 2 *Soit $z > 0$ un entier naturel. Les solutions en entiers naturels de*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{5}$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, sont données par

$$x = (u + v)u \qquad y = (u + v)v$$

où $uv = z$ est une factorisation de z telle que u et v sont des entiers naturels premiers entre eux.

Preuve : Pour $z > 1$, il suffit d'appliquer le Théorème 1 et de ne considérer que les solutions > 0, c'est–à–dire les solutions avec $u > 0$ et $v > 0$. Les formules conviennent aussi pour le cas $z = 1$. ■

Corollaire 3 *Soit $z > 1$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers naturels de l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{6}$$

telles que (x, y, z) sont premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = 2^{w-1}$$

où w est le nombre de facteurs premiers distincts de z.

Si $z = 1$, il n'y a qu'une seule solution : $(x, y) = (2, 2)$.

Preuve : identique à celle du Corollaire 1. ■

Corollaire 4 *Soit $z > 0$ un entier. Le nombre de paires de solutions en entiers naturels de l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{7}$$

telles que (x, y, z) ne sont pas nécessairement premiers entre eux, est donné par la formule

$$N = \frac{1}{2}\left(1 + \prod_{i=1}^{w}(2e_i + 1)\right)$$

où la décomposition de z en facteurs premiers est $z = \prod_{i=1}^{w} p_i^{e_i}$.

Preuve : semblable à celle du Corollaire 2. Il faut toutefois tenir compte du cas particulier $g = z$, qui dans le Corollaire 3 donne un compte légèrement différent, d'où le $+1$ correctif dans la formule finale. ■

Corollaire 5 *Toute solution de*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

avec x, y, z premiers entre eux (resp. non nécessairement premiers entre eux) est obtenue à partir d'une relation $u + v = w$ où u,v, w sont des entiers premiers entre eux deux à deux (resp. des entiers quelconques) en divisant chaque terme par uvw.

Preuve : Il suffit d'appliquer les formules montrées précédemment. ■
Exemple : En appliquant ce corollaire, on peut passer simplement d'un triplet pythagoricien classique, solution de $x^2 + y^2 = z^2$ à une solution de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$. Par exemple, à partir de la relation $3^2 + 4^2 = 5^2$, on obtient :

$$\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}\ .$$

Ainsi, l'équation de Fermat a une infinité de solution pour l'exposant -2. On voit aussi que l'équation de Fermat d'exposant $\leqslant -3$ n'a pas de solution.