L'égalité $2^4 = 4^2$ est–elle isolée ?

Denis SIMON (simon@math.unicaen.fr)

11 décembre 2009

Il est bien connu que la fonction puissance ne vérifie pas en général $a^b = b^a$. Et pourtant il existe un cas bien connu où cela est quand même vrai :

$$2^4 = 4^2 .$$

L'objectif de cette note est de chercher s'il y a d'autres égalités du même type, c'est–à–dire les solutions de l'équation diophantienne

$$a^b = b^a \tag{1}$$

où l'on cherche des solutions $0 < a < b$, avec a, b dans $\mathbb{Z}$ (solutions entières), ou $\mathbb{Q}$ (solutions rationnelles), ou $\overline{\mathbb{Q}}$ (solutions algébriques), ou $\mathbb{R}$ (solutions réelles). En particulier, nous allons montrer qu'il n'y a pas d'autre solution entière que $2^4 = 4^2$, mais nous allons montrer qu'il existe une infinité de solutions rationnelles.

On va montrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Les solutions de $a^b = b^a$, avec $0 < a < b$ sont données par*

$$a = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \qquad b = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}, \tag{2}$$

De plus on a

$$\begin{array}{llll}
(i) & a, b \in \mathbb{R} \iff t \in \mathbb{R}, \quad t > 0 & \text{(Prop. 3)} \\
(ii) & a, b \in \overline{\mathbb{Q}} \iff t \in \mathbb{Q}, \quad t > 0 & \text{(Prop. 5)} \\
(iii) & a, b \in \mathbb{Q} \iff t \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 & \text{(Prop. 4)} \\
(iv) & a, b \in \mathbb{Z} \iff t = 1 & \text{(Prop. 2)}
\end{array}$$

Avant de montrer chacun des cas de ce théorème, nous avons besoin d'un lemme qui permet de débroussailler le terrain.

Lemme 1 *Si $a^b = b^a$ avec $0 < a < b$, alors $a \in]1, e[$ et $b \in]e, +\infty[$. De plus pour tout $a \in]1, e[$, il existe un unique $b \in]e, +\infty[$ tel que $a^b = b^a$ (et réciproquement).*

Preuve : On voit d'abord que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$. Étudions donc la fonction sur $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Cette fonction est strictement croissante sur $]0, e[$, puis strictement décroissante sur $]e, +\infty[$, avec $f(1) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Ainsi, pour avoir $f(a) = f(b)$, on doit avoir $a \in]1, e[$ et $b \in]e, +\infty[$. La fin du lemme est une application du théorème des valeurs intermédiaires. ∎

Grâce à ce lemme, on peut déjà montrer la partie (*iv*) du théorème 1.

Proposition 2 *La seule solution entière non triviale de (1) est*

$$2^4 = 4^2$$

Preuve : D'après le lemme 1, on doit avoir $a \in]1, e[$. Le seul entier de cet intervalle est $a = 2$. Pour cette valeur de a, on voit que $b = 4$ correspond, donc c'est la seule possibilité. ∎

Pour démontrer la partie (i) du théorème 1, et en particulier la paramétrisation des solutions en fonction de t, on donne deux démonstrations, l'une algébrique, l'autre analytique en utilisant le lemme 1.

Proposition 3 *Les solutions de l'équation $a^b = b^a$, avec $0 < a < b$, sont paramétrées par la formule (2) avec $0 < t \in \mathbb{R}$.*

Preuve : (algébrique) On commence par chercher les solutions sous la forme $b = ua$, avec $u > 1$. La condition est donc

$$a^{ua} = (ua)^a$$

c'est–à–dire $a^u = ua$, ce qui peut encore s'écrire $a = u^{\frac{1}{u-1}}$. Les solutions sont donc à chercher parmi les couples (a, b) avec

$$a = u^{\frac{1}{u-1}}, \qquad b = u^{1+\frac{1}{u-1}}, \qquad 1 < u \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Pour éviter les puissances fractionnaires, on fait le changement de variable $\frac{1}{u-1} = t$, c'est–à–dire $u = 1 + \frac{1}{t}$. La condition $1 < u$ équivaut à $0 < t$. D'où la paramétrisation (2). ∎

Preuve : (analytique) Vérifier qu'avec les formules données on a bien $a^b = b^a$ est un calcul laissé au lecteur. Pour montrer que toute solution réelle est bien de cette forme, on commence par voir que $(1+\frac{1}{t})^t$ parcourt l'intervalle $]1, e[$ lorsque t parcourt $]0, +\infty[$. Pour cela, on pose $g(x) = x\log(1+\frac{1}{x})$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log(1 + \tfrac{1}{x}) - \tfrac{1}{x+1} \\ g''(x) &= \tfrac{-1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

De là, on trouve que g est croissante sur $]0, +\infty[$ et son image est $]0, 1[$. On déduit alors que $(1 + \frac{1}{t})^t = \exp(g(t))$ parcourt $]1, e[$. Avec les formules données, on a $a^b = b^a$ avec $a < b$, donc d'après le lemme 1, toutes les solutions sont de cette forme. ∎

On peut maintenant déterminer les solutions rationnelles de l'équation (1) et montrer la partie (iii) du théorème.

Proposition 4 *L'équation $a^b = b^a$ admet une infinité de solutions rationnelles. Ces solutions sont paramétrées par la formule (2) lorsque t est un entier naturel non nul, et il n'y en a pas d'autre.*

Preuve : Il est facile de voir que lorsque t est un entier dans la formule (2), a et b sont rationnels. C'est la réciproque qui est plus difficile.

Puisque les solutions a et b sont rationnelles, elles sont en particulier réelles, on peut donc les écrire sous la forme (2) avec $t > 0$ un réel. Mais $\frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{t}$ est aussi rationnel, donc $t \in \mathbb{Q}$.

Notons $t = \frac{A}{B}$ avec $A > 0$ et $B > 0$ premiers entre eux. Nous devons montrer que $B = 1$. Comme A et B sont premiers entre eux, on peut écrire une relation de Bézout, $Au + Bv = 1$. Ainsi, $a^u = \left(\frac{A+B}{A}\right)^{\frac{Au}{B}} = \left(\frac{A+B}{A}\right)^{v-\frac{1}{B}}$ est rationnel, et donc $\left(\frac{A+B}{A}\right)^{\frac{1}{B}}$ est aussi rationnel. Mais les entiers

$A+B$ et A sont premiers entre eux, donc en regardant leur décomposition en facteurs premiers, on voit qu'ils doivent tous les deux être des puissances B–ièmes. Ainsi, on doit avoir $A+B=X^B$ et $A=Y^B$ pour certains entiers X et Y. En particulier, on a $B=X^B-Y^B$.

Étudions l'équation $B=X^B-Y^B$, avec B, X, $Y \in \mathbb{N}^*$. On a

$$B=X^B-Y^B=(X-Y)(X^{B-1}+X^{B-2}Y+\cdots+XY^{B-2}+Y^{B-1})$$

Comme $B \neq 0$, on a $X-Y \geqslant 1$, et donc

$$B \geqslant (X^{B-1}+X^{B-2}Y+\cdots+XY^{B-2}+Y^{B-1}) \geqslant B$$

(la dernière inégalité étant vraie car il y a B termes dans la somme, qui sont tous $\geqslant 1$). Pour $B>1$, cela implique $X=Y=1$ et donc $B=0$, ce qui est absurde. Il faut donc conclure que $B=1$. ■

Exemple : Dans la formule (2), si on remplace t par des petits entiers, on trouve les couples (a,b) suivants :

t	1	2	3	4	5	
a	2	$(3/2)^2=9/4$	$(4/3)^3=64/27$	$(5/4)^4=625/256$	$(6/5)^5=7776/3125$	...
b	4	$(3/2)^3=27/8$	$(4/3)^4=256/81$	$(5/4)^5=3125/1024$	$(6/5)^6=46656/15625$	...

Proposition 5 *Les solutions algébriques de l'équation $a^b=b^a$ sont paramétrées par la formule (2) lorsque $t>0$ est un rationnel.*

Preuve : Il est clair que dans la formule (2), si t est rationnel, alors a et b sont algébriques.

Pour montrer la réciproque, on utilise le théorème (très difficile) de Gelfond et Schneider (1934), qui dit que si x et y sont des nombres algébriques tels que x^y soit aussi algébrique, alors $x=0$ ou $x=1$ ou $y \in \mathbb{Q}$. La preuve de notre proposition est donc la suivante :

On utilise la paramétrisation (2) avec $t>0$ un réel. Comme a et b sont supposés algébriques, leur quotient $\frac{b}{a}=1+\frac{1}{t}$ est aussi algébrique, donc t aussi. Ainsi, $1+\frac{1}{t}$ est algébrique (et différent de 0 et 1) ainsi que t. D'après le théorème de Gelfond et Schneider, si on veut que $a=(1+\frac{1}{t})^t$ soit encore algébrique, on doit avoir $t \in \mathbb{Q}$. ■

Exemple : En remplaçant t par des demi–entiers dans la formule (2), on trouve des racines carrées :

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
a	$\sqrt{3}$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$	$(\frac{7}{5})^2\sqrt{\frac{7}{5}}$
b	$3\sqrt{3}$	$(\frac{5}{3})^2\sqrt{\frac{5}{3}}$	$(\frac{7}{5})^3\sqrt{\frac{7}{5}}$

Exemple : On peut s'amuser à prendre encore d'autres valeurs dans la formule (2). Par exemple, pour $t=\sqrt{2}-1$, on trouve le couple de nombres transcendants $(a,b)=(\sqrt{2}+2)^{\sqrt{2}-1},(\sqrt{2}+2)^{\sqrt{2}})$. Avec $t=\sqrt{2}+1$, on trouve $(a,b)=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1},(\sqrt{2})^{\sqrt{2}+2})=(2^{(\sqrt{2}+1)/2},2^{(\sqrt{2}+2)/2})$. Ou encore avec le nombre d'or $t=\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, cela donne $(a,b)=(\phi^{\phi},\phi^{\phi+1})$...